L 148 - Dimension d'un ev. Rang. Exemples et applications.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}$

I. Bases et dimensions :

1. Familles libres et génératrices :

[Go] 111 **Définition 1** : Soit $A \subset E$ une partie de E. On dit que A est une partie génératrice de E (ou $(a)_{a \in A}$ une famille génératrice de E) si $\mathrm{Vect}(A) = E$

[Go] 111 **Définition 2** : Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de E. Alors (i) et (ii) sont équivalentes :

(i) Toute combinaison linéaire vérifiant $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ vérifie $\lambda_i = 0 \ \forall i \in I$

(ii) aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.

Une famille vérifiant (i) ou (ii) est dite libre.

Dans le cas contraire on dit qu'elle est liée.

[Gri] 10 **Exemple 3** : dans $\mathbb{R}^2$: * $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est libre et génératrice

* $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ est liée et génératrice

dans $\mathbb{R}^3$: * $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\13\\5\end{pmatrix}\right\}$ est liée, non-génératrice

* $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\right\}$ est libre

[Go] 111 **Théorème 4** : Si E est engendré par n vecteurs, toute famille libre a au plus n éléments.

[OA] 149 **Application 5** : si A est une $\mathbb{K}$-algèbre engendrée par n vecteurs alors $\forall a \in A$, il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a) = 0$. P est un polynôme annulateur de a.

2. Bases :

Définition 6 : une famille libre et génératrice de E est appelée base de E. [Go] 111

Exemple 7 : * $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$

* $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ une base de $\mathbb{R}^2$

Définition 8 : On dit que E est de dimension finie si il existe une famille génératrice finie de E. Dans le cas contraire on dit que E est de dimension infinie (Convention : $\dim(\{0_E\}) = 0$)

[On se place dorénavant dans le cas où E est un ev de dimension finie $n \geq 1$

Théorème 9 : Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E et $\mathcal{L}$ une famille libre, il existe $\mathcal{B}$ une base de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Corollaire 10 : [Base incomplète] toute famille libre peut être complétée en une base de E

Corollaire 11 : de toute famille génératrice de E on peut extraire une base.

Corollaire 12 : tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Proposition 13 : Toute famille libre de n vecteurs est une base de E. Toute famille génératrice de n vecteurs est une base de E.

Proposition 14 : Soient $E_1, \dots, E_k$ des s.e.v de E, alors : (i) $\forall i \in [\![1;k]\!]$ E_i est de dimension finie

(ii) $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ ssi $E = E_1 + \dots + E_k$ et $\dim(E) = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i)$

(iii) $E_1 + E_2$ est un s.e.v et $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$.

[OA] 151 [Go] 113

Application 15: Soit $F \subset E$ un s.e.v, $G \subset E$ un s.e.v avec $\dim(F) = \dim(G)$. Alors
(i) Il existe $S \subset E$ un sev de E tq $S \oplus F = E$
(ii) Il existe $H \subset E$ un sev supplémentaire commun à F et G $E = H \oplus F = H \oplus G$.

Remarque 16: En dimension infinie on a également existence de bases mais cela requiert l'axiome du choix.
On a également existence de 1 supplémentaires dont la dimension peut varier

3. Espaces vectoriels quotients:

[Go] 114

Définition 17: Si $\tilde{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension quelconque, $F \subset \tilde{E}$ un sev, si $\tilde{E}/F$ est de dimension finie on dit que F est de codimension finie.

Proposition 18: F est de codimension finie dans $\tilde{E}$ ssi F admet un supplémentaire S dans $\tilde{E}$ de dimension finie $\dim(\tilde{E}/F)$.

Corollaire 19: Si $\tilde{E}$ est de dimension finie, $F \subset \tilde{E}$
$\dim(\tilde{E}) = \dim(F) + \dim(\tilde{E}/F)$.

II. Dimension et applications linéaires:

1. Applications linéaires et rang:

[Go] 114 [Gri] 62 1

Proposition 20: une application linéaire sur E est entièrement définie par l'image des vecteurs de B, base de E.

Proposition/définition 21: Soit $f: E \to E'$ (E' $\mathbb{K}$-ev) une application linéaire. $f(E)$ est un sev de E' appelé image de f et noté $\mathrm{Im}(f)$. Sa dimension est appelée rang de f et notée $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$

[Gri] 62

Proposition/définition 22: $\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé noyau de f

Proposition 23: f est injective ssi $\ker(f) = \{0\}$.

Exemple 24: $D: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ $P \mapsto P'$ est linéaire
$\ker(D) = \{P(X) = a;\ a \in \mathbb{R}\}$ $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{R}[X]$.

Proposition 25: Soit $\{x_i\}_{i \in I}$ une famille de E.
(i) Si f est injective et $\{x_i\}_{i \in I}$ libre, $\{f(x_i)\}_{i \in I}$ est libre dans E'
(ii) Si f est surjective et $\{x_i\}_{i \in I}$ génératrice $\{f(x_i)\}_{i \in I}$ est génératrice de E'
(iii) Si f est bijective, l'image d'une base de E est une base de E'.

Proposition 26: Deux espaces vectoriels sont isomorphes ssi ils ont la même dimension.

Théorème 27: [Théorème du rang]
$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$

Corollaire 28: Si E et E' ont la même dimension les propriétés suivantes sont équivalentes:
(i) f est injective (ii) f est surjective (iii) f est bijective

Contre-exemples 29: En dimension infinie ce résultat est faux • L'application D de l'exemple 24 est surjective mais non-injective.
• $\Phi: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ $P \mapsto XP$ est injective mais non surjective

Théorème 30: [Factorisation] $E/\ker(f) \simeq \mathrm{Im}(f)$ [Go] 114

Application 31: [Polynômes interpolateurs] Pour tout $(a_1 \dots a_n) \in \mathbb{K}^n$ deux-à-deux distincts et $(b_1 \dots b_n) \in \mathbb{K}^n$

[OA] 154

il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1;n]\!]$ $P(a_i) = b_i$.

Application 32 : Soit $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ un produit euclidien sur E, $\forall \varphi \in E^*, \exists ! x \in E \quad \varphi = \langle \cdot ; x \rangle$.

3. Matrices et rang :

Définition 33 : Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ $(p,q \in \mathbb{N}^*)$. On appelle rang de A le rang de ses vecteurs colonnes (i.e. de la dimension de l'e.v qu'ils engendrent). Si A est la matrice d'une application linéaire f, $rg(A) = rg(f)$.

[G.] 122

Remarque 34 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible ssi $rg(A) = n$

Théorème 35 : Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $rg(A) = r \geq 1$, A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$

Corollaire 36 : Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang. En particulier deux matrices semblables ont le même rang.

Proposition 37 : $\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $rg(A) = rg({}^tA)$

[Rom2] 191

Théorème 38 : [Pivot de Gauss] Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ produit de matrices de permutation et de transvection telle que PA soit échelonnée en ligne.

[Cri] 44

Théorème 39 : L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sev de $\mathbb{K}^n$. Si le système sous forme échelonnée comporte k équations, l'espaces des solutions est de dimension $n-k$.

Exercice 40 : La famille $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0;1;1)$ et $v_3 = (0;1;-1)$ est-elle génératrice dans $\mathbb{R}^3$?

Corollaire 41 : Les vecteurs lignes d'une matrice et ceux de sa réduite échelonnée engendrent le même espace vectoriel. Les lignes non nulles de la forme réduite en forment une base.

[Gri] 50

Exercice 42 : Donner une base de $\mathrm{vect}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}\right)$

III. Applications et utilisation de la dim. finie :

1. Etude d'endomorphismes :

Théorème 43 : Pour $n = \dim(E) \geq 2$, $O(E)$ est engendré par l'ensemble des réflexions. Précisement, toute isométrie de E peut s'écrire comme le produit d'au plus n réflexions.

[Rom4] 716

2. Théorème de compacité de Riesz :

Théorème 44 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie. $A \subset E$ est compacte ssi A est fermée-bornée

Théorème 45 : En dimension finie toutes les normes sur E sont équivalentes

Théorème 46 : $(E, \|\cdot\|)$ est de dimension finie ssi sa boule unité fermée est compacte.

E est un $\mathbb{R}$-ev

[Dan]

3. Classification des formes quadratiques :

Théorème 45 : [Sylvester] Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une base (e_i) de E telle que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$, i.e.

$M_{e_i}(q) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $r = rg(q)$ et $p \in \mathbb{N}$ ne dépend que de q. $(p;r)$ s'appelle signature de q

[Cri] 173

[Go] Gourdon algèbre 2e éd
[Cri] Cufone Algèbre 6e éd
[Rom 1] Rombaldi Algèbre 1er éd
[Rom 2] Rombaldi Algèbre 2ème éd
[Dan] Dantzer Analyse
[OA] objectif agrégation 2ème éd